До какого знака будем считать число π?

Школьник на этот вопрос ответит: до второго, π = 3,14. Некоторые старшеклассники после запятой добавят еще две-три значащие цифры... В математике число π равно отношению длины окружности к ее диаметру. С древнейших времен в Вавилоне, Египте, Индии, Китае, Греции знали, что число π немногим больше 3. Сколько цифр необходимо использовать в расчетах, зависит от конкретной поставленной задачи. При решении школьных задач, например при вычислении длины окружности или дуги, площади круга, объема шара вполне достаточно использовать две значащие цифры после запятой.

Великий древнегреческий ученый Архимед в III в. до н.э. получил следующую оценку числа π:

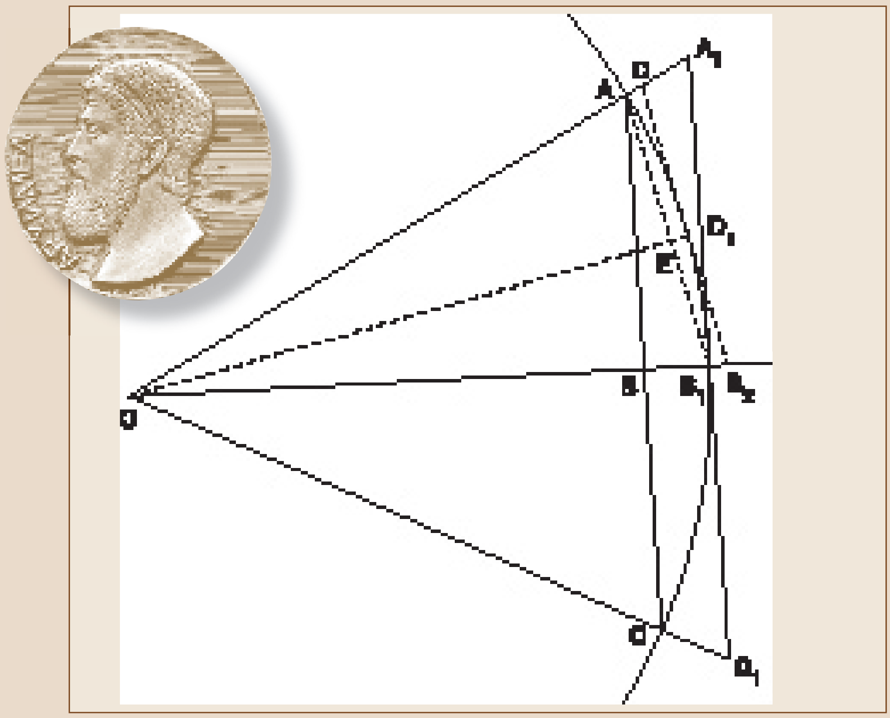
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

К этому выражению он пришел в результате кропотливых вычислений периметров вписанных и описанных по отношению к окружности многоугольников. Каждый раз при удвоении числа сторон правильного многоугольника происходило приближение длин периметров к длине окружности: для вписанного – до наименьшего числа, а для описанного – до наибольшего. Оценку числа π в некотором интервале Архимед получил, дойдя до вычислений периметров правильных 96-угольников. В античных источниках почти нет точных сведений об этом способе вычисления, однако существуют исторические реконструкции. Начинались вычисления с расчетов правильных 6-угольников (см. рисунок). В этом случае значение периметра находится очень просто. Для вписанного шестигранника при единичном диаметре значение его периметра равно 3, т.к. AC=OC=OA=1/2. Для описанного шестигранника со стороной A_1C_1 значение его периметра равно $2\sqrt{3}$, т.к. для треугольника A_1OC_1 справедливы следующие выражения: $A_1C_1 = OA_1 = OC_1$, $(A_1C_1)^2 - (A_1C_1/2)^2 = (OB_1)^2$, $OB_1 = 1/2$ и, следовательно, $A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Таким образом, для первого шага двусторонняя оценка числа π будет такой: $3 < \pi < 2\sqrt{3}$. Удваивая число сторон и используя предыдущие данные, найдем периметры 12-угольников (на рисунке это сторона AB_1 для вписанного и DB_2 – для описанного многоугольника). Для вписанного 12-угольника значение его периметра равно $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$, т.к. одна его сторона равна:

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} =$$
$$= \sqrt{AB^2 + (OB_1 - OB)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Для описанного 12-угольника периметр равен

$$12\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}},$$



поскольку из подобия треугольников DOD_1 и AOE следует, что $DD_1/AE = OD_1/OE$ и $DD_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$.

Следовательно, на второй ступени оценки

$$6\sqrt{2-\sqrt{3}} < \pi < 12\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$$

Архимед производил вычисления подобным образом вновь и вновь, основываясь только на теореме Пифагора и руководствуясь принципом подобия треугольников…

Следует подчеркнуть, что во времена Архимеда еще не было десятичных дробей, тригонометрических функций, хорошо разработанной техники извлечения квадратных корней. Архимеду для извлечения корня приходилось использовать пошаговый подбор дробных чисел путем их перемножения.

В первой половине IV в. в знаменитой обсерватории хана Улугбека под Самаркандом придворный астроном аль-Каши вычислил π с 17 знаками после запятой. Это был уникальный для того времени расчет. Он был связан с составлением таблицы синусов с шагом $1'$, необходимой для высокой точности астрономических вычислений. При этом он впервые использовал десятичные дроби, которые были введены в Европе только в следующем веке голландским математиком и инженером Симоном Стевином. Тем самым, кстати, чье доказательство о невозможности создания вечного двигателя вместе с рисунком замкнутой цепочки шаров, перекинутой через трехгранную призму, до сих пор красуется во многих учебниках физики. Через 150 лет, в 1593 г. французский математик Ф. Виет нашел лишь 9 цифр, дойдя до вычислений периметров 393216-угольника. На этой ступени число π равно 3,141592653… Только в начале XVII в. результат аль-Каши был превзойден голландским математиком Лудольфом ван Цейленом, вычислившим значение π с 32 десятичными знаками, после чего оно длительное время называлось числом Лудольфа.

Впервые обозначение числа буквой π встречается в работе “Обозрение достижений математики” английского математика У. Джонса, вышедшей в 1706 г., но общеупотребительным оно стало после опубликования работ Л. Эйлера, воспользовавшегося введенным символом. В конце XVIII в. А. Лежандр на основе работ И. Ламберта доказал, что число π иррационально. В 1882 г. немецкий математик Ф. Линдеман нашел строгое доказательство того, что это число не только иррационально, но и трансцендентно, т.е. не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами.

Поиски точного выражения π продолжались. После разработки методов дифференциального и интегрального исчисления было найдено много формул, содержащих число π. Некоторые из этих формул позволяют вычислить π приемами, отличными от метода Архимеда и более рациональными. Например, к числу π можно прийти, отыскивая пределы некоторых рядов. Так, Г. Лейбниц получил ряд

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots,$$

который дает возможность вычислить π более коротким путем. Например, при использовании только десяти членов этого ряда получаем три верные значащие цифры числа π.

С помощью числовых рядов английский математик У. Шенкс во второй половине IX в. вычислил 707 знаков после запятой и тем самым установил своеобразный рекорд вычислений того века, потратив на это 20 (!) лет активной жизни. Однако в 1945 г. с появлением первых ЭВМ при вычислении числа π было обнаружено, что У. Шенкс допустил ошибку в 520-м знаке и все последующие вычисления оказались неверными. Следует отметить то обстоятельство, что англичанин не стал свидетелем своей ошибки.

В 1949 г. Д. Нейман на одной из первых вычислительных машин ENIAC вычислил 2037 знаков числа π. В 1973 г. Ж. Гийу и М. Буйе преодолели отметку в миллион знаков, что заняло меньше одного дня работы компьютера CDC-7600. В Книгу рекордов Гиннесса попал результат профессора Г. Чудновского – ему первому в мире удалось превзойти рубеж в миллиард знаков. Однако рекорд продержался недолго: сотрудники Токийского университета Я. Канада и Д. Такахаши подняли планку до фантастической высоты – 206 миллиардов знаков, воистину доказав иррациональность числа π.

Тенденция поиска более эффективных алгоритмов расчета числа π с демонстрацией возможностей ЭВМ, вероятно, понадобится нам уже скоро при составлении шифрограмм для защиты конфиденциальной информации, а в далеком будущем – при расчете полета к другим галактикам. Ведь такие полеты непременно будут!

В.И. Матвеев,
кандидат технических наук